VỀ MỘT LỚP CÁC ĐẠI SỐ LIE THỰC GIẢI ĐƯỢC MÀ CÁC K-QUỸ ĐẠO HOẶC 0-CHIỀU HOẶC 4-CHIỀU

Lê Anh Vũ*, Dương Quang Hòa** và Nguyễn Anh Tuấn***

TÓM TẮT

Trong bài báo này, tiếp cận cách phân loại các MD-đại số theo số chiều cực đại của quỹ đạo trong biểu diễn đối phụ hợp được Arnal-Cahen-Ludwig sử dụng lần đầu trong [1], chúng tôi giới thiệu một lớp con các MD-đại số mà quỹ đạo chiều cực đại trong biểu diễn đối phụ hợp là 4.

ABSTRACT

A class of real solvable lie algebras such that their k-orbits are orbits of zero or four dimensions

IIn this paper, classification of MD-algebras by maximal dimension of orbit in the co-adjoint representation firstly used by Arnal-Cahen-Ludwig in [1], we introduce a subclass of MD-algebras such that maximal-dimensional orbit is 4 in co-adjoint representation.

1. MỞ ĐẦU

1.1. Giới thiệu về lớp MD

Lớp MD xuất hiện một cách tự nhiên trong quá trình khảo sát bài toán *"Đi tìm lớp các nhóm Lie mà C*-đại số của chúng có khả năng đặc trưng được bằng phương pháp K-hàm tử"*.

Giả sử *G* là một nhóm Lie thực giải được. *G* được gọi là một *MD-nhóm* nếu các K-quỹ đạo của nó hoặc là không chiều hoặc có chiều là một hằng số *k* (chẵn) nào đó không vượt quá số chiều của nhóm. Đại số Lie của MD-nhóm được gọi là *MD-đại số*. MD-nhóm và MD-đại số có số chiều *n* được ký hiệu tương ứng là *MDn-nhóm* và *MDn-đại số*.

Mặc dù lớp MD-nhóm và MD-đại số được định nghĩa khá đơn. Tuy nhiên, bài toán phân loại lớp MD cho đến nay vẫn còn là bài toán mở.

Chú ý rằng, có ít nhất 2 cách tiếp cận để liệt kê và phân loại các MD-đại số và MD-nhóm như dưới đây.

- ***Cách thứ nhất:*** Cố định số chiều của nhóm Lie và đại số Lie. Nhớ rằng, mọi nhóm (tương ứng đại số) Lie thực, giải được không quá 3 chiều đều là MD-nhóm (tương ứng MD-đại số), hơn nữa chúng đã được liệt kê hết từ lâu trong lý thuyết đại số Lie. Bởi vậy, ta chỉ cần bắt đầu từ các MD*n*-đại số và MD*n*-nhóm với $n \geq 4$.

* PGS. TS, Bộ môn Toán Kinh tế, Trường Đại học Kinh tế - Luật, ĐHQG HCM.
** Nghiên cứu sinh trường Đại học Sư phạm Tp.HCM.
*** Nghiên cứu sinh trường Đại học Sư phạm Tp.HCM.

Theo cách này, năm 1990, Lê Anh Vũ [2] đã phân loại triệt để (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) lớp các MD4-đại số. Gần đây, Lê Anh Vũ và các cộng sự đã hoàn thành việc phân loại đầy đủ lớp các MD5-đại số (xem [3] và [5]). Việc phân loại lớp các MDn-đại số (với $n \geq 6$) cho đến thời điểm này vẫn còn là bài toán mở.

- ***Cách thứ hai:*** Cố định số chiều cực đại của K-quỹ đạo, còn số chiều của nhóm Lie và đại số Lie là tuỳ ý.

Theo cách này, năm 1995, các nhà toán học D. Arnal, M. Cahen và J. Ludwig ([1]) đã thành công trong việc phân loại triệt để lớp con các MD-đại số mà K-quỹ đạo của các MD-nhóm tương ứng của chúng hoặc là 0-chiều hoặc là 2-chiều. Việc phân loại các MD-đại số mà chiều cực đại của các K-quỹ đạo là $2k$ (với $k \geq 2$) đến nay vẫn còn là bài toán mở.

Trong bài báo này, chúng ta ký hiệu *MD{0,2k}-đại số* là lớp các MD-đại số mà K-quỹ đạo chiều cực đại là $2k$ ($k \geq 1$). Trên cơ sở vận dụng cách tiếp cận thứ hai này, chúng tôi sẽ giới thiệu một lớp con của lớp MD{0,4}-đại số.

1.2. Các kết quả trước đây liên quan trực tiếp đến bài báo

- *Phân loại triệt để các MD5-đại số* (xem các công trình [3] và [5]).
- *Phân loại các MD-đại số mà K-quỹ đạo của MD-nhóm tương ứng hoặc là 0-chiều hoặc là 2-chiều* (xem [1]).

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ KẾT QUẢ LIÊN QUAN

2.1. K-biểu diễn của một nhóm Lie

Cho G là nhóm Lie tùy ý và $\mathcal{G}$ = Lie(G) là đại số Lie của G. Ký hiệu $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathcal{G}$. Với mỗi $g \in G$, ta có tự đẳng cấu: $A_{(g)} : G \to G$ được xác định như sau:

$$A_{(g)}(x) := g.x.g^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

Tự đẳng cấu trên cảm sinh ánh xạ

$$A_{(g)*} = \left(L_g.R_{g^{-1}}\right) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

$$X \mapsto A_{(g)*}(X) := \frac{d}{dt}\left[g.exp(tX)g^{-1}\right]|_{t=0}$$

mà được gọi là *ánh xạ tiếp xúc* của $A_{(g)}$.

Định nghĩa 2.1: Tác động

$$Ad : G \to Aut(\mathcal{G})$$
$$g \mapsto Ad(g) := A_{(g)_*} = \left(L_g . R_{g^{-1}}\right)_*$$

được gọi là *biểu diễn phụ hợp* của G trong $\mathcal{G}$.

Định nghĩa 2.2: Tác động

$$K : G \to Aut(\mathcal{G}^*)$$
$$g \mapsto K(g)$$

sao cho

$$\langle K(g)F, X\rangle = \langle F, Ad(g^{-1})X\rangle;\ F \in \mathcal{G}^*, X \in \mathcal{G}$$

được gọi là *biểu diễn đối phụ hợp* hay *K-biểu diễn* của G trong $\mathcal{G}^*$.

Ở đây $\langle F, X\rangle$, $F \in \mathcal{G}^*, X \in \mathcal{G}$ là chỉ giá trị của dạng tuyến tính $F \in \mathcal{G}^*$ tại trường véctơ (bất biến trái) $X \in \mathcal{G}$.

Định nghĩa 2.3: Mỗi quỹ đạo của K-biểu diễn của G trong $\mathcal{G}^*$ được gọi là *K-quỹ đạo* hay *quỹ đạo Kirillov* của G (trong $\mathcal{G}^*$).

Như vậy, với mỗi $F \in \mathcal{G}^*$, K-quỹ đạo chứa *F* được xác định bởi:

$$\Omega_F := \{K(g)F / g \in G\}$$

2.2. Dạng song tuyến tính Kirillov

Với mỗi $F \in \mathcal{G}^*$, ta xét dạng song tuyến tính phản xứng B_F trên $\mathcal{G}$ như sau:

$$B_F(X,Y) := \langle F, [X,Y]\rangle;\quad \forall X, Y \in \mathcal{G}.$$

Ký hiệu *cái ổn định* của F qua biểu diễn đối phụ hợp của G trong $\mathcal{G}^*$ là G_F và $\mathcal{G}_F := Lie(G_F)$, tức là $G_F = \{g \in G \mid K(g)F = F\}$. Khi đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2.4. Hạt nhân của B_F và số chiều của Ω_F được cho bởi hệ thức sau:

$$Ker B_F = \mathcal{G}_F \text{ và } \dim \Omega_F = \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{G}_F.$$

Mệnh đề 2.4 cho phép ta xác định số chiều của quỹ đạo Ω_F thông qua ma trận biểu diễn của dạng song tuyến tính Kirillov B_F.

3. NỘI DUNG CHÍNH

3.1. Mô tả lớp con của MD{0,4}-đại số

Cho $\{G_n\}$ là một lớp các đại số Lie với G_n là đại số Lie n chiều ($n \geq 4$) có cơ sở là $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ với các móc Lie được xác định như sau:

- Trường hợp $n = 2m$:

$$[X_1, X_k] = X_k; \quad (3 \leq k \leq 2m)$$

$$[X_2, X_k] = \begin{bmatrix} X_{k+1}, \; khi \; k = 2i-1 \\ -X_{k-1}, \; khi \; k = 2i \end{bmatrix}, \; (i \geq 2)$$

- Trường hợp $n = 2m+1$:

$$[X_1, X_k] = X_k; \quad (3 \leq k \leq 2m)$$

$$[X_1, X_n] = 2X_n$$

$$[X_2, X_k] = \begin{bmatrix} X_{k+1}, \; khi \; k = 2i-1 \\ -X_{k-1}, \; khi \; k = 2i \end{bmatrix}, \; (2 \leq i \leq m)$$

$$[X_3, X_4] = X_n$$

3.2. Định lí: Mỗi đại số Lie thuộc lớp $\{G_n\}$ đều là một MD{0,4}-đại số.

Chứng minh: Trước tiên, bằng cách kiểm tra được tiếp, dễ dàng thấy rằng các móc Lie xác định như trên là thỏa mãn đồng nhất thức jacobi. Do đó G_n là đại số Lie với mọi $n \geq 4$.

Khi đó, với $F = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + ... + \alpha_n X_n^* \in \mathcal{G}^*$, ma trận biểu diễn của dạng song tuyến tính, phản đối xứng Kirillov B_F có dạng như sau:

$$\langle F, [X_i, X_j] \rangle = (b_{ji}), \; \forall i, j.$$

- Trường hợp $n = 2m$:

$$B_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \cdots & -\alpha_{2m-1} & -\alpha_{2m} \\ 0 & 0 & -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_6 & \alpha_5 & \cdots & -\alpha_{2m} & \alpha_{2m-1} \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_4 & -\alpha_3 & 0 & . & & & & & . \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0 & & . & & & & . \\ \alpha_6 & -\alpha_5 & 0 & & & . & & & . \\ \cdots & \cdots & 0 & & & & . & & . \\ \alpha_{2m-1} & \alpha_{2m} & 0 & & & & & . & . \\ \alpha_{2m} & -\alpha_{2m-1} & 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng $r(B_F)=\begin{cases} 0, \ khi \ \alpha_3^2+\alpha_4^2+...+\alpha_{2m}^2=0 \\ 4, \ khi \ \alpha_3^2+\alpha_4^2+...+\alpha_{2m}^2\neq 0 \end{cases}$, do vậy G là một MD{0,4}-đại số.

- Trường hợp $n=2m+1$:

$$B_F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots & -\alpha_{2m-1} & -\alpha_{2m} & -2\alpha_{2m+1} \\ 0 & 0 & -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_6 & \alpha_5 & \dots & -\alpha_{2m} & \alpha_{2m-1} & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & -\alpha_{2m+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_{2m+1} & 0 & & & & & & \cdot \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0 & & \cdot & & & & & \cdot \\ \alpha_6 & -\alpha_5 & 0 & & & \cdot & & & & \cdot \\ \dots & \dots & 0 & & & & \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{2m-1} & \alpha_{2m} & 0 & & & & & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{2m} & -\alpha_{2m-1} & 0 & & & & & & \cdot & \cdot \\ 2\alpha_{2m+1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $r(B_F)=\begin{cases} 0, \ khi \ \alpha_3^2+\alpha_4^2+...+\alpha_{2m}^2+\alpha_{2m+1}^2=0 \\ 4, \ khi \ \alpha_3^2+\alpha_4^2+...+\alpha_{2m}^2+\alpha_{2m+1}^2\neq 0 \end{cases}$, do vậy G cũng là một MD{0,4}-đại số. ■

3.3. Vài bài toán mở cần tiếp tục nghiên cứu

– Phân loại toàn bộ lớp MD{0,4}-đại số, xa hơn nữa là toàn bộ lớp MD-đại số.

– Đối với các MD{0,4}-đại số đã liệt kê ở trên, nhanh chóng mô tả K-quỹ đạo của các MD-nhóm liên thông, đơn liên tương ứng. Từ đó, xét các MD-phân lá liên kết với chúng và đặc trưng C*-đại số của các MD-phân lá này bằng phương pháp K-hàm tử.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Arnal D., Cahen M., Ludwig J. (1995), "Lie Groups whose Coadjoint orbits are of Dimension Smaller or Equal to Two", *Kluwer Academic Publishers*, Netherlands, 33, 183-186.

2. Vu L.A. (1990), "On the Foliations Formed by the Generic K– orbits of the MD4–Groups", *Acta Math.Vietnam*, N0 2, 39-55.

3. Vu L.A., Shum K.P. (2008), "Classification of 5-dimensional MD-algebra having commutative derived ideals", *Advances in Algebra and Combinatorics*, Singapore: World Scientific co, 353-371.

4. Vu L.A., Hoa D.Q. (2009), "The topology of foliations formed by the generic K-orbits of a subclass of the indecomposable MD5-groups", *Science in China, series* A: Mathemmatics, 52 (2), 351-360.

5. Vu L.A., Hieu H.V., Nghia T.T.H. (2011), "Classification of 5-Dimensional MD-algebras Having Non-commutative Derived Ideals", *East-West Journal of Mathematics*, Volume 13, No 2, pp. 115-129.